reflector 안테나 분석시 발생하는 차이에 대한 증명

먼저, 어떤 방식으로 PINN을 통해서 주엽과 SLL등을 계산하였는지 확인하고 가자.

1. 입사파 생성의 기하학적 증명

안테나의 급전부 역할을 하는 미소 다이폴(Hertzian Dipole) 소스를 정의한다.
이는 물리적으로 올바른 입사파를 생성하기 위함이다.

- 코드

```
def get_incident_dipole_normalized(pts_norm):
    # Dipole Source assuming Y-polarization
    x = pts_norm[:,0:1] / K_VAL
    y = pts_norm[:,1:2] / K_VAL
    z = pts_norm[:,2:3] / K_VAL
    r = torch.sqrt(x**2 + y**2 + (z - Z_FEED)**2 + 1e-9)
    r_hat_y = y / r
    pattern = torch.sqrt(1 - r_hat_y**2 + 1e-9)
    mag = (1.0 / r) * pattern
    phase = -K_VAL * r
    return mag * torch.cos(phase), mag * torch.sin(phase)
```

- y축 방향으로 편파된 미소 다이폴의 방사 패턴 크기 $|E|$는 다이폴 축과 관측 벡터 $\vec{r}$ 사이의 각도 ψ에 대해 $\sin\psi$에 비례한다.

1. 벡터 해석 : 위치 벡터 $\vec{r}$과 다이폴 방향 단위벡터 $\hat{y}$의 내적은 코사인 정의에 의해 다음과 같다.
   $\cos\psi = \hat{r} \cdot \hat{y} = \frac{y}{r}$
   이 값이 코드의 `r_hat_y` 에 해당한다.
2. 삼각함수 항등식이 $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$ 이므로, 필요한 방사 패턴인 $\sin\psi$는 다음과 같이 유도된다.
   $\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}$
3. **결론:** 코드의 `torch.sqrt(1 - r_hat_y**2)` 는 위 수식을 그대로 구현한 것으로, y축 편파 다이폴의 물리적 방사 특성을 정확히 모사한다. (1.0 / r) 항을 통해 거리에 따라 에너지가

감쇠하는 구면파(Spherical Wave)의 특성까지 물리적으로 정확히 반영한다.

2. 벡터 개구면 적분법과 푸리에 변환 (Vector Aperture Integration)

등가 원리에 기반하여 개구면의 전기장 분포를 원거리장으로 변환하는 핵심 단계이다.

- 코드

```
def calculate_far_field_cut_vector(X, Y, E_aperture, mask, phi_cut_deg=0)
    ## 이 함수 내부의
    phase_term = K_VAL * np.sin(theta) * (X_masked * np.cos(phi_rad) + Y_
    integral_fy = np.sum(Fy_masked * np.exp(1j * phase_term)) * dA
```

- 원거리장 조건($r \gg \lambda$)에서, 개구면 S_a의 필드에 의한 방사 패턴은 개구면 필드의 2차원 공간 푸리에 변환으로 표현된다.

1. 방사 적분식 : 그린 함수를 이용한 적분식은 다음과 같다.
   $\vec{E}(r) \approx -jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{r} \times \iint_{S_a}[\hat{n} \times \vec{E}_a - \eta\hat{r} \times (\hat{n} \times \vec{H}_a)]e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'}ds'$
2. 위상항 유도 : 관측 방향 $\hat{r}$과 개구면 위치 $\vec{r}'$의 내적은 다음과 같이 전개된다.
   $\hat{r} \cdot \vec{r}' = x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi$
3. 결론 : 코드의 phase_term은 위 내적 항에 파수 k를 곱한 것이며, np.exp(1j * phase_term)을 곱하여 적분하는 과정은 공간 도메인의 필드를 각도 도메인(k-space)으로 변환하는 푸리에 변환(Fourier Transform)을 수행하는 것이다.

3. 수치 적분법: 리만 합 (Riemann Sum)

컴퓨터는 연속적인 적분을 직접 수행할 수 없으므로, 이를 이산적인 데이터의 합으로 근사하는 과정이다.

- 코드

```
    ## 메인 루프 내부에서
    dA = (x_1d[1] - x_1d[0]) * (y_1d[1] - y_1d[0])
    integral_fy = np.sum(...) * dA
```

1. 리만 합의 정의 : 2중 적분 $\iint f(x,y)dA$는 격자 간격 $\Delta x, \Delta y$가 0으로 수렴할 때 다음의 합으로 정의된다.
   $\iint f(x,y)dxdy \approx \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y$
2. 결론 : 코드에서 dA는 미소 면적 $\Delta x \Delta y$를 의미하며, np.sum은 이중 시그마($\sum\sum$) 연산을 수행한다. 이는 직사각형 공식을 이용한 수치 적분이며, 격자 해상도가 충분히 높다면 해석적 적분 값에 수렴한다.

4. 벡터 좌표 변환 및 경사 인자

단순한 스칼라 파동이 아닌, 벡터 전자기장의 특성을 반영하기 위해 좌표계 변환과 호이겐스 원리(Huygens' Principle)에 따른 보정 계수를 적용한다.

- 코드

```
obliquity = (1 + np.cos(theta)) / 2
E_theta_val = obliquity * (integral_fx * np.cos(phi_rad) + integral_fy *
```

1. 경사 인자 (Obliquity Factor) : 러브의 등가 원리(Love's Equivalence Principle)에 의해 개구면의 등가 전류(J)와 등가 자류(M)가 방사할 때, 전방($\theta = 0$)으로 에너지가 집중되는 현상을 설명하는 항이다.
   $\text{Element Pattern} \propto \frac{1+\cos\theta}{2}$

이 항은 $\theta = 0$일 때 1, $\theta = 180°$일 때 0이 되어 물리적 타당성을 보장한다.

2. 좌표 변환 : 직교 좌표계 성분(F_x, F_y)을 구면 좌표계 단위 벡터($\hat{\theta}, \hat{\phi}$)로 내적(Dot Product)하여 투영한다.

- $\hat{\theta}$ 방향 투영 (주편파):
  $\hat{x} \cdot \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi, \quad \hat{y} \cdot \hat{\theta} = \cos\theta\sin\phi$
- $\hat{\phi}$ 방향 투영 (교차편파)
  $\hat{x} \cdot \hat{\phi} = -\sin\phi, \quad \hat{y} \cdot \hat{\phi} = \cos\phi$

3. 결론: 위 두 요소를 결합하여 코드는 다음의 벡터 회절 공식을 구현한다.

- Theta 성분
  $E_\theta \approx \text{Obliquity} \cdot (F_x\cos\phi + F_y\sin\phi)$
- Phi 성분
  $E_\phi \approx \text{Obliquity} \cdot (F_y\cos\phi - F_x\sin\phi)$

이는 안테나의 교차 편파(Cross-pol) 및 주 편파(Co-pol) 성분을 정확히 분리해낸다.

5. 이득 계산 (Gain Calculation)

최종적으로 계산된 전기장의 크기를 안테나 성능 지표인 이득(Gain, dBi)으로 변환한다.

- 코드

```
# 함수 제일 마지막 부분에
numerator = 4 * np.pi * E_total_mag_sq
denominator = (LAMBDA**2) * P_rad
gain_linear = numerator / denominator
```

1. 방사 강도와 이득의 정의 : 안테나 이득 G는 등방성 안테나 대비 방사 전력 밀도의 비율로 정의된다.
   $G(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_{in}}$
2. 수식 유도 : 원거리장 식에서 거리 항 $1/r$과 파장 항 $1/\lambda$의 관계를 정리하면(Friis 전송 공식 유도 과정 참조), 다음과 같은 형태가 된다.
   $G = \frac{4\pi |E_{far}|^2}{\lambda^2 P_{rad}}$
3. 결론 : 코드는 IEEE 표준 이득 정의에 따라 입력 전력(개구면 총 전력 P_{rad}) 대비 특정 방향으로의 방사 효율을 dBi 단위로 정확하게 산출한다.

최종

이 코드는 맥스웰 방정식으로부터 유도된 Dipole Theory, Fourier Optics, Huygens-Fresnel Principle을 기반으로 하며, 이를 Riemann Integration과 Vector Coordinate Transformation을 통해 수치적으로 구현하였다.

이제, 왜 FEKO의 결과값과 PINN의 결과값이 다른지 분석해 보자.

1. 급전 모델

- PINN
  Ideal Hertzian Dipole

- FEKO
  3D CAD Model / Waveguide Port (비교군으로 사용한 실험에선 이상적으로 사용.)

FEKO는 실제 피드의 금속 구조에 의한 산란, 위상 중심 변화, 실제 빔폭을 반영한다.
PINN 코드는 수학적 이상값만 사용하므로 조사 분포(Illumination Taper)가 달라져 SLL에 큰 영향을 준다.
이는 PINN의 출력값이 각 좌표에 대한 전자기값이기 때문에, 필연적으로 생기는 오차일 수 있다.

2. 해석 영역

- PINN
  개구면 상의 필드만 고려
- FEKO
  전체 금속 표면 전류(J) 해석 MoM

PINN 코드는 반사판 가장자리의 회절이나 전류가 뒤로 돌아가는 현상을 무시하는 경향이 있다.
이를 해결하기 위해 모델 학습시의 Loss function에 경계조건을 포함시키지만, 경향 자체를 극복할 순 없었다.
이는 경계조건에서의 오차와 지배방정식(Helmholtz)의 오차 중 지배방정식의 오차를 감소시키는 난이도가 경계조건에서의 오차를 줄이는 것 보다 훨신 쉽고, 또한 경계조건에 대한 데이터(경계조건에 해당되는, 가장자리 좌표값)에 비해 지배방정식에 대한 데이터(안테나의 모든 부분에 대한 데이터)가 훨신 많을 수 밖에 없기 때문에 일어나는 현상이다.

3. 가림 효과

- PINN
  일반적으로 고려되지 않는다.
- FEKO
  Strut/Feed Blockage 고려

실제 안테나는 피드와 지지대가 반사된 파를 가린다.
FEKO는 이를 계산하여 이득 감소와 SLL 상승을 반영하지만, PINN일 경우 이를 구현하는 난이도가 있다.

4. 적분 대상

- PINN
  PINN의 출력은 안테나 앞의 단일 평면. 이 값을 적분하는 것으로 값(SLL, 등)연산이 시작된

다.

- FEKO
  실제 금속 형상 전체

실제 안테나의 금속 형상 전체를 전부 고려하는 FEKO에 비해, 안테나 앞의 단일 평면만을 고려하는 PINN은 최종 계산값에서 오차가 클 수 있다.

결론

위와 같은 이유로 약간의 오차가 생긴다.
또한, FEKO가 SLL 등 값을 계산할 때 어떤 것을 더 고려하는지, 또 어떤 내용을 고려하는지 알 수 없기에, FEKO의 출력값과 완전히 일치되는 값을 만들어 내는데는 어려움이 있다.

이전 실험인 Laplace, poisson 실험에서는 FDM과 PINN 연산에 사용한 수식과 알고리즘이 정확히 일치하기에, 오차가 적게 올바른 결과가 나왔다.
하지만, reflector 안테나의 경우, FEKO가 해석을 끝낸 최종 해석 값과, PINN을 통해 나온 값을 가지고 어떻게 잘 해서 만든 해석값을 비교한 것이기에, 오차가 심하게 나온다.

추가로, PINN과 FDM, FEKO 는 전부 구하는 값과 적분 대상이 다르다.
이로인해 발생하는 오차가 매우 큰 것 같다.

구분	FEKO (MoM)	FDM / FEM	PINN
무엇을 구하나?	금속 표면의 전류 (J)	공간 격자의 전/자기장 (E, H)	좌표점의 전/자기장 (E, H)
적분 대상	실제 금속 형상 전체	안테나를 감싸는 가상의 상자	안테나 앞의 단일 평면
물리적 의미	소스 적분	등가 원리	물리 광학
SLL 정확도	최상 (회절 완벽 반영)	상 (전방위 포착 가능)	중 (회절/후방 반사 누락 가능성)

하지만, FDM의 결과와 PINN의 결과의 오차가 적게 나온다는 것은 이미 이전 실험에서 알 수 있었기 때문에, 이런 결론을 내릴 수 있다.
주엽에서의 약간의 오차는 PINN 연산시 고려한 사항과 FEKO에서 연산시 고려한 사항이 서로 다르기 때문에 나온 오차이며, 이는 FEKO에서 어떤 것들을 고려했는지를 알아내면 오차는 거의 없는 수준으로 줄일 수 있다.
부엽에서의 떨어지는 정확도는 PINN이 출력하는 값의 한계로 인한 것이며, 이는 적분 대상이 FEKO와 다르기 때문에 생기는 오차로 태생적 한계라 할 수 있다.
결국, 같은 값을 뽑아내기 위한 연산 과정이 다르기에 일어나는 오차 인 것 같다.